

Spinortheorie der Elementarteilchen III. Das freie Teilchen

Von FERDINAND CAP

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Innsbruck

(Z. Naturforschg. 8a, 748—753 [1953]; eingegangen am 4. September 1953)

Neben den äußeren Freiheitsgraden der Translation besitzen Elementarteilchen zwei innere Freiheitsgrade: elektrische Ladung und Spin. Da — abgesehen von neutralen (und „antineutralen“) Teilchen — nur zwei Ladungszustände, positiv und negativ geladen, in der Natur verwirklicht werden und da ein Teilchen mit dem Maximalspin s bekanntlich $2s + 1$ Einstellmöglichkeiten des Spins zu einer vorgegebenen Richtung besitzt, kann man an einem geladenen Teilchen vom Maximalspin s insgesamt $2(2s + 1)$ verschiedene physikalische Zustände unterscheiden. Da ganz allgemein in der Physik die Zahl der Funktionen, die einen Vorgang beschreiben sollen, gleichgesetzt wird mit der Zahl der physikalisch möglichen Zustände*, wurde vom Verf. die Hypothese aufgestellt, es müsse in mathematisch und physikalisch einwandfreier Weise möglich sein, ein geladenes Elementarteilchen vom Maximalspin s durch $2(2s + 1)$ Funktionen zu beschreiben. Donnert hat gezeigt, daß das in dieser Hypothese steckende mathematische Problem lösbar ist. In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß die Beschreibung kräftefreier Teilchen nach der vorgelegten modifizierten Spinortheorie auch physikalisch richtige Ergebnisse liefert.

In der vorgeschlagenen Theorie¹ stimmt die Anzahl der in der Natur vorkommenden Zustände eines Elementarteilchens überein mit der Zahl der verwendeten Funktionen; die Theorie ist daher einfacher als die übliche Theorie und man wird hoffen können, daß diese von überzähligen Funktionen und von Nebenbedingungen freie Theorie für Einheitstheorien der Elementarteilchen (im Sinne von Einstein²-Schrödinger³ oder im Sinne von Heisenberg⁴ einen günstigeren Ausgangspunkt liefert als die Theorie von Dirac⁵ und Fierz⁶.

I. Unquantisierte Theorie

Wir gehen aus von den 4 komplexen, insgesamt $4(2s + 1)$ reelle Einzelkomponenten umfassenden vollsymmetrischen Spinoren^{7,8} vom Rang $2s$

$$\begin{aligned} a^{(s)\mu_1 \dots \mu_{2s}} &= a^{\mu}, & a_{\mu_1 \dots \mu_{2s}}^{(-s)} &= \tilde{a}_{\mu}, \\ a^{*(s)\mu_1 \dots \mu_{2s}} &= a^{*\mu}, & a_{\mu_1 \dots \mu_{2s}}^{*(-s)} &= \tilde{a}_{\mu}^*, \end{aligned}$$

* Wir verwenden das Wort Zustand statt Freiheitsgrad, da üblicherweise der Spin als ein Freiheitsgrad mit $2s + 1$ Einstellmöglichkeiten bezeichnet wird; hier sind aber alle $2s + 1$ „Möglichkeiten“ gemeint.

¹ F. Cap, Spinortheorie der Elementarteilchen I, Z. Naturforschg. 8a, 740 [1953].

² A. Einstein, Ann. Mathematics, 46, 578 [1945]; 47, 731 [1946].

³ E. Schrödinger, The final affine field laws I, II, III, Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 51, 163 [1947]; 51, 205 [1948]; 52, 1 [1948]; Communications of the Dublin Institute for Advanced Study, Nr. 6 u. Nr. 8 (Studies in the Generalized Theory of Gravitation I, II) Dublin 1950, 1951.

wo der Stern * die konjugiert komplexe Größe bezeichnet und die bei Spiegelungen ineinander übergehenden Spinoren jeweils nebeneinander stehen. Diese vier, $4(2s + 1)$ reelle Komponenten umfassenden Spinoren genügen alle einer Schrödinger-Gordon-Gleichung:

$$(\square - z^2) a = 0, \quad \text{wo } z = \frac{mc}{\hbar}. \quad (1)$$

Insgesamt gibt es $4(2s + 1)$ Gleichungen der Art (1). Hingegen gibt es keine Differentialgleichungen erster Ordnung, die nur Spinoren mit ausschließlich einer Indexsorte enthalten. Die hier vorgeschlagene Theorie, die ihrer Anlage nach mit Spinoren, die nur Indices einer Sorte besitzen, arbeiten muß, muß daher auf Differentialgleichungen 1. Ordnung (Diracscher Typ⁵) verzichten^{1,9}, doch erhält man hierfür den Vorteil, daß sämtliche „Nebenbedingungen“ wegfallen. Weiter erreicht man, daß die Zahl der Wellenfunktionskomponenten nun wirklich mit der Zahl der physikalischen Zustände übereinstimmt.

⁴ W. Heisenberg, Zur Quantenmechanik der Elementarteilchen, Z. Naturforschg. 5a, 251 [1950].

⁵ P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A 155, 447 [1936].

⁶ M. Fierz, Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigem Spin, Helv. physica Acta 12, 3 [1939]; s. auch P. Urban, Acta physica austriaca 4, 380 [1951].

⁷ H. Donnert, Spinortheorie der Elementarteilchen II, Z. Naturforschg. 8a, 745 [1953].

⁸ H. Donnert, Dissertation Innsbruck 1951, s. Acta physica austriaca 7, 181 [1953].

⁹ W. Pauli, Physic. Rev. 58, 720 [1940].



Die Verwendung von $4(2s+1)$ reellen Funktionen scheint dem zu widersprechen, doch ist der hinzukommende Freiheitsgrad (2 Möglichkeiten) als Freiheit der Wahl zwischen Links- und Rechtssystem zu interpretieren⁷. Andererseits kann man aber auch sagen, daß eben zur Beschreibung elektrischer Ladungen komplexe Funktionen nötig sind – dadurch erhält man die doppelte Anzahl von reellen Funktionen, nämlich $4(2s+1)$. Allerdings kann man die 4 wieder nicht so deuten, daß der Ladungsfreiheitsgrad 4 Zustände, nämlich positiv, negativ, neutral und antineutral habe, da es nicht möglich ist, geladene und ungeladene Teilchen zugleich zu beschreiben – Funktionen sind eben entweder komplex – und entsprechen dann der doppelten Anzahl reeller Funktionen – oder sie sind reell. Trotz der $4(2s+1)$ Funktionen erhält man jedoch nur $2(2s+1)$ Quantenzahlen – und auf diese kommt es letzten Endes an. Der Grund hiefür ist der, daß neben den $4(2s+1)$ Gleichungen (1) noch $2(2s+1)$ Vertauschungsrelationen als „Nebenbedingungen“ bestehen, welche bewirken, daß die Quantenzahlen als Produkte AA^* usw. darzustellen sind.

Zur Lösung von (1) setzen wir für *beide* Teilchensorten an (in der unquantisierten Theorie gibt es ja keinen Unterschied zwischen Bosonen und Fermionen, da beide (1) erfüllen⁹):

$$\begin{aligned} a^\mu &= V^{-\frac{1}{2}} \sum_k \omega_k^{-\frac{1}{2}} e^{ikx} \\ &\quad \cdot (A^\mu(k) e^{+i\omega t} + B^{\star\mu}(k) e^{-i\omega t}), \\ a^{\star\mu} &= V^{-\frac{1}{2}} \sum_k \omega_k^{-\frac{1}{2}} e^{-ikx} \\ &\quad \cdot (A^{\star\mu}(k) e^{-i\omega t} + B^\mu(k) e^{+i\omega t}), \end{aligned} \quad (2)$$

wo V das Normierungsvolumen und k bzw. x die Dreieckvektoren k_x, k_y, k_z bzw. x, y, z seien.

Einsetzen in (1) liefert den relativistischen Energiesatz

$$-k_l k^l = x^2 = -k^2 - k_4^2 = -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (3)$$

wo $k_4 = \frac{\omega}{ic}$ (Metrik: x, y, z, ict), so daß

$$\omega = \pm c \sqrt{x^2 + k^2}. \quad (4)$$

Hierbei müssen wir beachten, daß A und B^* bzw. A^* und B voneinander unabhängig sind (Wellengleichung 2. Ordnung!) – nach der Quantisierung, wenn also die Amplituden Matrizen werden, müssen also A und B^* , A^* und B verschiedenen Bau haben. Die beiden Vorzeichen in der Formel für ω [in (2) bereits verwertet] entsprechen den beiden Ladungen – in einem vorgegebenen Feld hat ja das Teilchen

der anderen Ladung eine Energie umgekehrten Vorzeichens.

Die Spinoren \tilde{a}_μ und \tilde{a}_μ^* transformieren so wie die zu a^μ und $a^{\star\mu}$ gespiegelten Spinoren; man kann für sie daher setzen^{1,8}:

$$\tilde{a}_\mu = i^{-2s} a_\mu = i^{6s} a_\mu, \quad \tilde{a}_\mu^* = i^{2s} a_\mu^*, \quad (5)$$

so daß

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\mu &= V^{-\frac{1}{2}} i^{6s} \sum_k \omega_k^{-\frac{1}{2}} e^{ikx} \\ &\quad \cdot (A_\mu(k) e^{+i\omega t} + B_\mu^*(k) e^{-i\omega t}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\mu^* &= V^{-\frac{1}{2}} i^{2s} \sum_k \omega_k^{-\frac{1}{2}} e^{-ikx} \\ &\quad \cdot (A_\mu^*(k) e^{-i\omega t} + B_\mu(k) e^{+i\omega t}). \end{aligned} \quad (2')$$

Zur Feldgleichung (1) gehört die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\partial a^{\star\mu}}{\partial x_p} \frac{\partial \tilde{a}_\mu}{\partial x^p} + \frac{\partial a^\mu}{\partial x_p} \frac{\partial \tilde{a}_\mu^*}{\partial x^p} \\ &\quad + \varkappa^2 (a^{\star\mu} \tilde{a}_\mu + a^\mu \tilde{a}_\mu^*). \end{aligned} \quad (6)$$

Aus ihr lassen sich in bekannter Weise¹⁰ mittels der allgemeinen, Kontinuitätsgleichungen genügenden Definitionen

$$s_k = \text{const.} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x_k}} \psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k}} \psi^* \right)$$

(verschwindet für reelle Felder),

$$t_{kl} = \text{const.} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x_k}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_l} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k}} \cdot \frac{\partial \psi^*}{\partial x_l} \right) + \delta_{kl} \cdot \mathcal{L}$$

ladungskonjugierte spiegelungsinvariante Ansätze für die Dichte des elektrischen Viererstromes s_k

$$\begin{aligned} s_k &= \frac{e}{4} i^{-2s-1} \left(\frac{\partial \tilde{a}_\mu^*}{\partial x_k} a - \frac{\partial \tilde{a}_\mu}{\partial x_k} a^{\star\mu} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{a}_\mu \frac{\partial a^{\star\mu}}{\partial x_k} - \tilde{a}_\mu^* \frac{\partial a^\mu}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

und für die Dichte des Energie-Impuls-Tensors t_{kl}

$$\begin{aligned} t_{kl} &= -\hbar i^{-2s} c^2 \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial \tilde{a}_\mu^*}{\partial x_k} \frac{\partial a^\mu}{\partial x_l} + \frac{\partial \tilde{a}_\mu}{\partial x_k} \frac{\partial a^{\star\mu}}{\partial x_l} \right. \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{a}^\mu}{\partial x_l} \frac{\partial a^{\star\mu}}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{a}_\mu^*}{\partial x_l} \frac{\partial a^\mu}{\partial x_k} + \delta_{kl} \left(\frac{\partial \tilde{a}_\mu}{\partial x_p} \frac{\partial a^{\star\mu}}{\partial x_p} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \tilde{a}_\mu^*}{\partial x_p} \frac{\partial a^\mu}{\partial x_p} + \varkappa^2 \tilde{a}_\mu a^{\star\mu} + \varkappa^2 \tilde{a}_\mu^* a^\mu \right) \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

gewinnen.

¹⁰ G. Wentzel, Quantentheorie der Wellenfelder, Deuticke, Wien 1943; s. auch A. March, Quantum Theory of Particles and Wave Fields, Wiley, New York 1951.

Diese Ansätze gelten *unabhängig vom Spin und von der Statistik* der Teilchen. Es ist damit möglich geworden, irgendein Problem (z. B. Streuung im Coulomb-Feld) für sämtliche Elementarteilchen durch einen einzigen Rechnungsgang zu lösen. Es ist also z. B. nicht mehr notwendig, die Streuung des Elektrons, vektoriellen Mesons usw. durch eigene Rechnungen einzeln zu behandeln.

Setzen wir (2), (2') in (7) ein, so ergibt sich nach Integration über das Periodizitätsvolumen und unter Beachtung der Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen für die Funktionen e^{ikx} für den Viererstrom S_k ($k = 1, \dots, 4$, $S_4 = iCQ$, $x_4 = it$)

$$Q = -\frac{e}{2} \sum_k (A^* A + AA^* i^{4s} - BB^* - B^* Bi^{4s}), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} S_l &= -\frac{e}{2} \sum_k k_l (A^* A + AA^* i^{4s}) \\ &\quad + \frac{e}{2} \sum_k k_l (-BB^* - B^* Bi^{4s}) + Z \quad (10) \\ &\quad (l = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

wobei sich die Produkte mit $e^{\pm 2i\omega t}$ in (9) weggehoben haben; in (10) verbleiben jedoch Zitterglieder Z von der Form $A^* B^* e^{-2i\omega t}$ usw. Bei Fermionen ($i^{4s} = -1$) fallen in der unquantisierten Theorie ($A^* B^* = B^* A^*$ usw.) diese Glieder weg; bei Bosonen fallen diese Glieder erst in der quantisierten Theorie weg.

Wir definieren durch

$$A_{\mu_1 \dots \mu_{2s}}^*(k) A^{\mu_1 \dots \mu_{2s}}(k) \equiv A_{\mu}^* A^{\mu} = A^* \mu A_{\mu} = \sum_{r=1}^{2s+1} \bar{N}_r(k), \quad (11)$$

$$B^* \mu_1 \dots \mu_{2s}(k) B_{\mu_1 \dots \mu_{2s}}(k) \equiv B^* \mu B_{\mu} = B_{\mu}^* B^{\mu} = \sum_{r=1}^{2s+1} N_r(k) \quad (12)$$

Amplitudenquadrate (die in der Quantentheorie zu Matritzen werden — in der unquantisierten Theorie

gilt auch $AA^* = \bar{N}$, $BB^* = \bar{N}$). Wie man leicht abzählt, bestehen die Invarianten der Art $A_{\mu_1 \dots \mu_{2s}}^* A^{\mu_1 \dots \mu_{2s}}$ usw. wegen der Vollsymmetrie der Spinothen aus je $2s+1$ Gliedern, die wir mit \bar{N}_r ($r = 1 \dots 2s+1$) bezeichnen. Diese Glieder entsprechen den $2s+1$ Einstellmöglichkeiten des Teilchenspins. Führt man (11) und (12) in (9) ein, so erhält man für Bosonen

$$Q = -e \sum_k \sum_{r=1}^{2s+1} \bar{N}_r(k) + e \sum_k \sum_r \bar{N}_r(k). \quad (13)$$

Durch geeignete Normierung der Amplituden lässt sich also in der unquantisierten Theorie jeder beliebige Ladungswert erreichen. Der Gesamtstrom erleidet periodische Schwankungen, die mit der Möglichkeit von Paarbildungen zusammenhängen. Diese klassischen Schwankungen sind jedoch physikalisch uninteressant, da erst die quantisierte Theorie die wirklichen Geschehnisse richtig beschreibt.

Daß in der klassischen Wellenfeldtheorie das Wort Teilchen überhaupt gebraucht werden kann, liegt wohl daran, daß zwischen z und der Teilchenmasse ein Zusammenhang besteht.

Für Fermionen ($i^{4s} = -1$) folgt $Q = S_l = 0$; dies röhrt davon her, daß das Verhalten von Fermionen nur mittels des Ausschließungsprinzips richtig erfaßt werden kann. Das Ausschließungsprinzip beruht aber wesentlich auf der Quantisierung und kann daher in der klassischen Feldtheorie nicht formuliert werden. Fermionen können also überhaupt nur durch quantisierte Wellenfelder beschrieben werden, während für Bosonen eine, wenn auch unvollständige unquantisierte „korrespondenzmäßig-klassische“ Beschreibung möglich ist (klassische Elektrodynamik!). Verf. sieht diesen prinzipiellen Unterschied zwischen beiden Teilchensorten als Hinweis dafür an, daß die von Schrödinger¹¹ vertretene Meinung, „Fermionen seien vorwiegend Teilchen und Bosonen vorwiegend Wellen“, wohlfundiert ist.

Für den Energie-Impuls-Tensor T_{kl} erhalten wir [unter Verwendung von (3)] analog [H integrale Hamilton-Funktion, G_l ($l = 1, 2, 3$) Feldimpuls]

$$T_{44} \equiv -H = -\frac{1}{2} \sum_k \hbar \omega_k \cdot (A^* A + AA^* i^{4s} + BB^* + B^* Bi^{4s}), \quad (14)$$

$$T_{4l} \equiv iC G_l = \frac{1}{2} iC \sum_k \hbar k_l \cdot (A^* A + AA^* i^{4s} - BB^* - B^* Bi^{4s}); \quad (15)$$

T_{44} ist für beide Teilchensorten (auch in der quantisierten Theorie: $A^* B^* \neq B^* A^*$) frei von Zittergliedern; ebenso aber auch T_{4l} .

Für Bosonen ergibt sich somit

$$\hbar \omega_k = \hbar v_k = E_k = \pm c \sqrt{m^2 c^2 + k^2 \hbar^2} \quad (16)$$

für

$$H = \sum_{r=1}^{2s+1} \sum_k E_k (\bar{N}(k) + \bar{N}^+(k)), \quad (17)$$

¹¹ E. Schrödinger, private Mitteilung.

(ohne Nullpunktsenergie in der unquantisierten Theorie!) und wegen $\hbar k_l = p_l$

$$G_l = \sum_{r,p} p_l (\bar{N}_r(p) - \bar{N}_r^+(p)).$$

Für Fermionen verschwinden H und G_k ; dies liegt wohl daran, daß man in einer unquantisierten Wellenfeldtheorie den Energie-Impuls-Tensor von Fermionen nicht definit machen kann⁹ — dies gelingt erst mit Hilfe der Löchertheorie nach der Quantisierung der Theorie.

II. Quantisierte Theorie

In der quantisierten Theorie werden die Spinoren Operatoren und die Amplituden $A(k)$ usw. werden Matrizen, deren Abhängigkeit von k wir durch einen Index ausdrücken. Wir verwenden die invarianten Vertauschungsrelationen in der Form¹⁰

$$[\psi_\sigma^*(x, t), \psi_{\sigma'}(x', t')]_\pm = \text{const. } d_{\sigma\sigma'} D(x - x', t - t'), \quad (18)$$

wo $d_{\sigma\sigma'}$ ein vom Spin des Feldes abhängiger⁶ Differentialoperator ist. Wie Wentzel zeigte¹⁰, sind diese Relationen für Bosonen äquivalent mit den kanonischen Bedingungen

$$[\pi_\sigma(x), \psi_{\sigma'}(x')]_- = \delta_{\sigma\sigma'} \delta(x - x') \cdot \text{const.}, \quad (19)$$

wo $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}$ usw., d. h. mit (6):

$$\begin{aligned} \pi &= -\frac{\partial \tilde{a}^*}{c^2 \partial t}, \quad \pi^* = -\frac{\partial \tilde{a}}{c^2 \partial t}, \\ \tilde{\pi} &= -\frac{\partial a^*}{c^2 \partial t}, \quad \tilde{\pi}^* = -\frac{\partial a}{c^2 \partial t}, \end{aligned} \quad (20)$$

so daß sich durch Einsetzen von (2) und (2') schließlich ergibt (für gleiche Indices μ und μ'):

$$A_k A_{k'}^* - A_{k'}^* A_k = \delta_{kk'}, \quad (21)$$

$$B_k B_{k'}^* - B_{k'}^* B_k = \delta_{kk'}$$

mit der hierzu nicht in Widerspruch stehenden Forderung

$$AB = BA = A^* B^* = B^* A^* = 0, \quad (22)$$

was unter Berücksichtigung von (21) bedeutet, daß die beiden Faktoren in (22) Matrizen vom selben Bau sein müssen. Wegen (22) fallen in der quantisierten Theorie sämtliche bosonische (und fermionische) Zitterglieder weg. Aus (21) folgt bekannterweise¹⁰ ($B = \text{Bose}$)

$$A_k^B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

B_k^B : von A_k^B unabhängige Matrix gleicher Form;

$$A_k^{*B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (23)$$

B_k^{*B} : von A_k^{*B} unabhängige Matrix gleicher Form.

Da für Bosonen keine Beschränkung für die Anzahl der Teilchen in einem bestimmten durch r und k charakterisierten Zustand gilt⁹, sind A^B, B^B usw. unendliche Matrizen, so daß nach (11) und (12)

$$A_k^{*B} A_k^B = \sum_r \bar{N}_{rk} \bar{N}_{rk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$B_k^{*B} B_k^B = \sum_r \bar{N}_{rk}^+, \text{ unabhängige Matrix gleicher Form.}$

Für Fermionen sind die invarianten Vertauschungsrelationen (18) nach Wentzel¹⁰ und Fierz⁶ äquivalent mit

$$[\psi_\sigma^*(x), \psi_{\sigma'}(x')]_+ = \text{const.} \cdot \delta_{\sigma\sigma'} \delta(x - x'),$$

wobei natürlich, um die Energie positiv definit zu machen, nach Pauli⁹ mittels des Antikommators quantisiert werden muß. Der übliche Zusammenhang¹⁰ $\pi \sim \psi^*$ der Diracschen Theorie geht allerdings bei uns verloren, da dieser Zusammenhang an eine besondere^{1, 10} Lagrange-Funktion erster Ordnung gebunden ist. Nach Pauli⁹ gibt es aber keinen Grund, für Fermionen an einer Differentialgleichung erster Ordnung festzuhalten.

Man erhält schließlich (für gleiche Indices μ und μ' , $F = \text{Fermi}$)

$$\begin{aligned} A_k^F A_{k'}^F + A_{k'}^F A_k^F &= \delta_{kk'}, \\ B_k^F B_{k'}^F + B_{k'}^F B_k^F &= \delta_{kk'} \end{aligned} \quad (24)$$

und die Bedingung (22), die mit (24) nicht in Widerspruch steht. Das Pauli-Prinzip steckt in (24) drinnen, da diese Relationen bewirken, daß die Matrizen nur zweireihig werden. In einem durch r und k charakterisierten Zustand dürfen ja nur zwei Teilchen (entgegengesetzter Ladung) vorhanden sein. Nun genügt aber das Pauli-Prinzip, d. h. die Quantisierung mittels eines Antikommators, *allein nicht*^{9, 10}, um die Energie von Fermionen positiv definit zu machen. Zum Pauli-Prinzip muß noch die Löchertheorie treten, die bekanntlich positiv geladene Fermionen als Löcher im negativen Energiespektrum der negativ geladenen Teilchen, und aus Gründen der Ladungssymmetrie der Theorie, die negativ geladenen Fermionen als Löcher (Lücken)

im negativen Energiespektrum der positiv geladenen Fermionen ansieht. Mathematisch bedeutet dies*.

$$\begin{aligned} \sum_{r,k}^+ N_{rk}^F &= \sum_{r,k} (1 - \bar{N}_{rk}^F), \\ \sum_{r,k}^- \bar{N}_{rk}^F &= \sum_{r,k} (1 - N_{rk}^F). \end{aligned} \quad (25)$$

Durch diese Nebenbedingung zwischen den Quantenzahlen des Feldes werden wir in deren Definition eingeengt; während wir bei Bosonen die Definitionen (11), (12) mangels einer solchen einschränkenden Nebenbedingung auch in die quantisierte Theorie übernehmen könnten, können wir wegen (25) für Fermionen nur mehr (11) [oder nur (12)] übernehmen. An Stelle von (12) tritt (25), d. h. mit (24)

$$\sum_{r,k}^+ N_{rk}^F = \sum_k (1 - A_k^F A_k^F) = \sum_k A_k^F A_k^{*F}. \quad (26)$$

Da nun wegen (22) A^F und B^F bzw. A^{*F} und B^{*F} gleichen (und daher, was schon in der unquantisierten Theorie gefordert wurde, A^F und B^{*F} verschiedenen) Bau haben müssen, folgt statt (12) die durch die Löchertheorie erzwungene neue Definition gemäß (26):

$$\begin{aligned} A_k^F A_k^{*F} &= B_k^F B_k^{*F} = \sum_r^+ N_{rk}^F, \\ A_k^{*F} A_k^F &= B_k^F B_k^{*F} = \sum_r^- \bar{N}_{rk}^F. \end{aligned} \quad (27)$$

Alle Relationen (22), (24), (27) werden erfüllt durch:

$$\begin{aligned} A_k^F &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & A_k^{*F} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 \end{pmatrix}, \\ B_k^F &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & B_k^{*F} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 \end{pmatrix}, \\ N_{rk}^F &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \bar{N}_{rk}^F &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun alle diese Ergebnisse der quantisierten Theorie in die Formeln der unquantisierten Theorie ein, so erhalten wir aus (9), (10) für Ladung und Strom *beider* Teilchensorten

$$Q = e \sum_{r,k}^+ (N_{rk}^B F - \bar{N}_{rk}^B F), \quad (28)$$

$$S_l = -e \sum_{\substack{r,k \\ l=1,2,3}} k_l \bar{N}_{rk}^B F + e \sum_{r,k}^+ (-k_l) N_{rk}^B F,$$

während sich für Energie (14) und Impuls (15) für Bosonen

$$H = \sum_{k,r} E_k (\bar{N}_{rk}^B + N_{rk}^B) + \sum_k^+ E_k, \quad (29)$$

* Herr Prof. Dirac machte mich in dankenswerter Weise darauf aufmerksam, daß in (25) \sum_k anzuschreiben sind, was viele Autoren übersehen¹⁰.

¹² F. Cap, Acta physica austriaca **6**, 36 [1952].

$$G_l = \sum_{k,r} p_l (\bar{N}_{rk}^B - N_{rk}^B) \quad (30)$$

und für Fermionen

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\substack{k,r \\ E_k > 0}} E_k \bar{N}_{rk}^F - \sum_{\substack{k,r \\ E_k < 0}} E_k N_{rk}^F \\ &= \sum_{\substack{k,r \\ E_k > 0}} |E_k| \bar{N}_{rk}^F + \sum_{\substack{k,r \\ E_k < 0}} |E_k| N_{rk}^F \end{aligned} \quad (31)$$

ergibt, wo E_k die in „Elektronenenergien“ normierte Energie bedeutet¹⁰.

$$G_l = \sum_{k,r} |p_l| N_{rk} - \sum_{k,r} |p_l| \bar{N}_{rk}. \quad (32)$$

Die Formeln (27) bis (31) geben die bekannten¹⁰ Ergebnisse der üblichen Theorie^{5,6} wieder. Die neue Theorie führt somit beim kräftefreien Teilchen zu bekannten und vernünftigen Ergebnissen. Trotz dieser Reproduktion scheint dem Verfasser die vorgelegte Theorie gewisse Vorteile gegenüber der üblichen Theorie aufzuweisen:

1. Es stimmt die Zahl der Zustände der Teilchen überein mit der Zahl der verwendeten Funktionen.

2. Die Unterschiede zwischen Fermionen und Bosonen liegen *einzig und allein* in der *Form der Matrizen A, B usw.*, so daß es möglich ist, bestimmte Probleme völlig unabhängig von Spin und Statistik zu behandeln, also mit einmaliger Durchrechnung das Verhalten aller Elementarteilchen zu erfassen.

3. Die von Tensoren etwas abweichenden Transformationseigenschaften der Bosonenspinoren (*selbstduale* Tensoren) lassen es als möglich erscheinen, daß die Theorie bei Wechselwirkungsproblemen¹² andere Ergebnisse als die übliche Theorie liefert — vielleicht sogar vernünftigere (endlicher Wirkungsquerschnitt für Streuung im Coulomb-Feld auch für $v \rightarrow c$ für ein Teilchen beliebigen Spins¹³).

4. Die Theorie dürfte für Verallgemeinerungen^{2,3,4,14} einen guten Ausgangspunkt bieten; z. B. gelingt leicht eine vom Spin unabhängige nichtlineare Verallgemeinerung der Theorie (bezüglich der Spezialisierung für $s = 0$, s. eine Vorarbeit¹⁵ des Verfassers).

Inwieweit diese Eigenschaften der Theorie vorteilhaft sind, müssen erst ausführlichere Rechnungen zeigen. Es sei nur noch darauf hingewiesen, daß die nichtlinearen unitären Theorien^{2,3,14} der Gravi-

¹³ H. Donnert, Über geladene Elementarteilchen mit Spin 1, Z. Physik, im Druck.

¹⁴ F. Cap, Acta physica austriaca **6**, 135 [1952]; J. Physique Radium **14**, 213 [1953].

¹⁵ F. Cap, Nuovo Cimento, **10**, 1347 [1953].

tation und des Elektromagnetismus der $2(2s + 1)$ -Einfachheitsforderung bereits genügen: die Gravitation [$s = 2, 2(2s + 1) = 10$] wird durch 10 Größen (symmetrischer metrischer Fundamentaltensor) und das Maxwell-Feld [$s = 1, 2(2s + 1) = 6$] durch einen Sechservektor dargestellt, während z. B. in

der klassischen Elektrodynamik (bzw. Proca Meson) 10 Größen benötigt werden. Über eine allgemeine, auf der $2(2s + 1)$ -Forderung beruhende nichtlineare Theorie der Elementarteilchen mit variablem Massenterm soll in Kürze an anderer Stelle berichtet werden.

NOTIZEN

Zur Frequenzabhängigkeit von Elektronenschwankungserscheinungen in Halbleitern

Von K. W. Böer und K. Junge

II. Physikalisches Institut der Humboldt-Universität, Berlin

(Z. Naturforschg. 8a, 753—755 [1953]; eingeg. am 16. September 1953)

Bekanntlich nimmt die Elektronenschwankung in Halbleitern mit wachsender Frequenz ab. Es zeigt sich jedoch, daß für verschiedene Halbleiter und unterschiedliche Versuchsbedingungen nicht immer eine gleiche Frequenzabhängigkeit erhalten wurde.

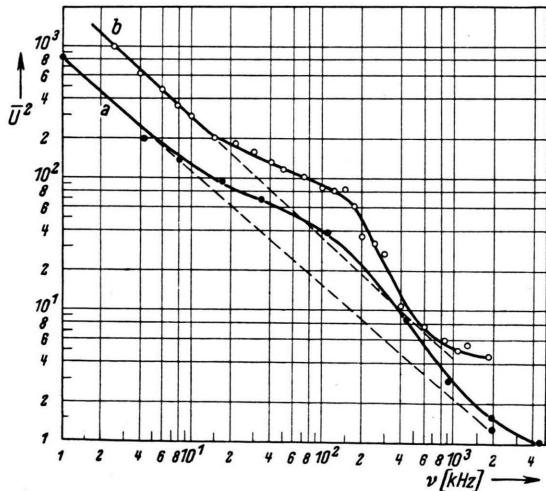


Abb. 1. Gemessenes Schwankungsquadrat in willkürl. Einheiten als Funktion der Frequenz. a) Germanium nach van der Ziel und Mattson, b) Cadmiumsulfid nach Böer (sehr große Photoströme).

So haben einige Autoren¹ einen Abfall der Elektronenschwankung gemäß einem $1/\nu$ -Gesetz gefunden. Andere Autoren zeigten, daß in einigen Fällen sich ein deutlicher Buckel aus diesem $1/\nu$ -Abfall erhebt² (vgl. Abb. 1). In letzter Zeit von uns im Bereich von 1 kHz

bis 2,5 MHz durchgeführte Messungen an CdS-Einkristallen zeigten jedoch, daß darüber hinaus Frequenzabhängigkeiten auftreten, die besser durch zwei Potenzgesetze approximiert werden können. Dabei fällt die Elektronenschwankung bis zu einer Grenzfrequenz ν_0 gemäß einem $1/\nu^\alpha$ -Gesetz und danach gemäß einem $1/\nu^\beta$ -Gesetz ab (Abb. 2). Die Exponenten schwanken dabei als Funktion der Versuchsbedingung und für verschiedene Kristalle gemäß $0,5 < \alpha < 1,5$ und $0,5 < \beta < 3$. Ein Abfall gemäß einem $1/\nu$ -Gesetz ergibt sich dabei als Grenzfall.

Bisher vorliegende Theorien zeigen, daß die Elektronenschwankungen in Halbleitern, welche einen zusätzlichen Anteil gegenüber dem Rauschen der Wider-

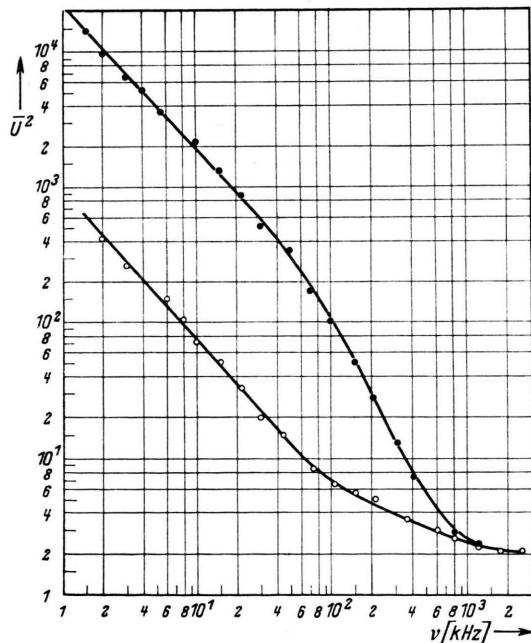


Abb. 2. Gemessenes Schwankungsquadrat in willkürl. Einheiten als Funktion der Frequenz am Cadmiumsulfid bei kleineren Photoströmen. ○ — ○ $i_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ A}$, ● — ● $i_0 = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ A}$.

¹ H. C. Torrey u. C. A. Whitmer, Crystal Rectifiers, McGraw Hill Co., New York 1948.

² R. H. Mattson u. A. van der Ziel, J. appl. Physics 24, 222 [1953]; K. W. Böer, Dissertation, Berlin 1951.